

Таким образом, для данных b_1 , b_2 и $\alpha \neq 0$ существует счетное число коэффициентов $c_{2,m}$, для которых (3.1), (3.13), (3.14) имеют ненулевые финитные решения.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ \lambda \left(\frac{c_1}{a} \frac{ib_1}{a} + \frac{c_2}{a} \frac{ib_2}{a} \right) &= -i. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Положим для определенности $c_1 = 1$. При этом

$$\lambda = \frac{a^2}{b_1 - b_2}. \quad (3.20)$$

Условие (И) означает, что существует $\beta = 0$. Нули функции $\mathcal{E}(t)$ даются формулой $\beta = \frac{\text{Ln } 1 \cdot a}{i(b_1 - b_2)}$, среди них 0 действительно содержится.

Для $\alpha = 0$ получаем единственное решение с $\int_{-\infty}^{\infty} y(x) dx = 1$, имеющее вид

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{a}{b_2 - b_1} \frac{e^{ib_1 ta^{-j-1}} - e^{ib_2 ta^{-j-1}}}{ta^{-j}} dt. \quad (3.21)$$

Сделав замену $x_1 = x - \frac{b_1 + b_2}{2}$, уравнение (3.1) с условиями (3.13) и (3.14) всегда можно привести к виду

$$y'(x) + \alpha y(x) = \lambda (c_1 y(ax - b_1) + c_2 y(ax + b_1)).$$

Подставив $x_2 = \mu x$, получим

$$y'(x) + \alpha y(x) = \lambda (y(ax - 1) + cy(ax + 1)). \quad (3.22)$$

Для $\alpha = 0$ уравнение (3.22) имеет вид

$$y'(x) = \lambda (y(ax - 1) - y(ax + 1)). \quad (3.23)$$

При этом

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin ta^{-j}}{ta^{-j}} dt; \quad \lambda = -\frac{a^2}{2}. \quad (3.24)$$

При $a = 2$ получаем $y(x) = \text{ur}(x)$. Обозначим функцию, определяемую формулой (3.24), $h_a(x)$. Выяснить вид носителя функции $h_a(x)$ можно, например, следующим образом. Как известно, функция $\frac{\sin t}{t}$ является характеристической функцией случайной величины, равномерно распределенной (р. р.) на отрезке $[-1, 1]$. Тогда функция

$$F_a(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin ta^{-j}}{ta^{-j}} \quad (3.25)$$

— характеристическая функция случайной величины

$$\xi(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{-j} \xi_j, \quad (3.26)$$

где $\{\xi_j\}$ — последовательность независимых р. р. на $[-1, 1]$ случайных величин. Функция $h_a(x)$ — плотность случайной величины $\xi(a)$. Теперь очевидно, что

$$\text{supp } h_a(x) = [-b, b], \quad (3.27)$$

где $b = \sum_{j=1}^{\infty} a^{-j} = \frac{1}{a-1}$. Тогда

$$F_a(t) = \frac{\sin ta^{-1}}{ta^{-1}} F(ta^{-1}). \quad (3.28)$$

Пусть $F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a) t^k$. Из (3.25) следует, что $c_{2k+1}(a) = 0$, так что

$$F_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(a) t^{2k}. \quad (3.29)$$

Поскольку

$$\frac{\sin ta^{-1}}{ta^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k} a^{-2k}}{(2k+1)!}, \quad (3.30)$$

то (см. (3.28))

$$c_{2k}(a) = \sum_{j=0}^k \frac{c_{2k-2j}(a) (-1)^j a^{-2j}}{a^{2k-2j} (2j+1)!}, \quad (3.31)$$

откуда

$$c_{2k}(a) (1 - a^{-2k}) = \sum_{j=1}^k \frac{c_{2k-2j}(a) (-1)^j}{(2j+1)!} a^{-2k}$$

и, наконец,

$$c_{2k}(a) = \frac{1}{a^{2k} - 1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{c_{2l}(a) (-1)^{k-l}}{(2k-2l+1)!}. \quad (3.32)$$

Нетрудно заметить, что $c_0(a) = 1$. Из (3.32) следует

$$|c_{2k}(a)| \leq \frac{1}{a^{2k} - 1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(2k-2l+1)!} \max_{j < k} |c_{2j}(a)|.$$

Поскольку

$$\sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(2k-2l+1)!} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} = C_1 < \infty,$$

то начиная с некоторого k $c_{2k}(a) < \max_{j < k} |c_{2j}(a)|$, откуда $|c_{2k}(a)| < C$ для всех k . Поэтому

$$|c_{2k}(a)| \leq \left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{a^{2j} - 1} \right) C_1^k C_2$$

и, следовательно, $|c_{2k}(a)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из (3.32) следует

$$|c_{2k}(a)| \leq C_3 \prod_{j=1}^k \frac{1}{(a^{2j} - 1)}, \quad (3.33)$$

так как

$$v_k = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{|c_{2l}(a)|}{(2k - 2l + 1)!} \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, и начиная с некоторого k $v_k < 1$. Из (3.33) нетрудно получить

$$|c_{2k}(a)| < c_4 a^{-\sum_{j=1}^k 2j} = C_4 a^{-(k+1)k}. \quad (3.34)$$

Оценку (3.34) можно еще улучшить. Скорость убывания $c_{2k}(a)$ в дальнейшем понадобится, например, для оценки остаточного члена при разложении функции $ip(x)$ в ряд специального вида.

Уточним поведение v_k при $k \rightarrow \infty$. Из (3.34) получаем

$$\begin{aligned} v_k &< \sum_{l=0}^{k-1} \frac{C_4 a^{-l(l+1)}}{(2k - 2l + 1)!} = C_4 \sum_{j=1}^k \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} = \\ &= C_4 \left(\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} + \sum_{j=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}^k \frac{a^{-(k-j+1)(k-j)}}{(2j+1)!} \right) \leq \\ &\leq C_4 \left(a^{-\frac{k^2}{4}} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{(2j+1)!} + \sum_{j=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}^k \frac{1}{(2j+1)!} \right) \leq \\ &\leq C_4 \left(C_5 a^{-\frac{k^2}{4}} + C_6 \frac{1}{(k+1)!} \right) \leq C_7 \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Поскольку (см. (3.32)) $|c_{2k}(a)| \leq \frac{1}{a^{2k} - 1} v_k$, то

$$|c_{2k}(a)| \leq \prod_{j=1}^k \frac{1}{a^{2j} - 1} \frac{C_7^k}{\prod_{j=1}^k (j+1)!} \leq C_8 a^{-k(k+1)} \left(\prod_{j=1}^k j! \right)^{-1}. \quad (3.35)$$

Так как

$$c_{2k}(a) = \frac{F_a^{(2k)}(0)}{(2k)!}, \quad (3.36)$$

а

$$F_a^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} h_a(x) dx, \quad (3.37)$$

то

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} h_a(x) dx \right| \leq C_8 a^{-k(k+1)} (2k)! \left(\prod_{j=1}^k j! \right)^{-1} \leq C_9 a^{-k(k+1)}. \quad (3.38)$$

Рассмотрим $h_a(x)$ при $a > 2$. Из (3.23) и (3.27) следует $h'_a(x) \equiv 0$ на $[-b_1, b_1]$, где $b_1 = b - \frac{2b}{a} = b \left(1 - \frac{2}{a}\right) > 0$, и, значит,

$h_a(x) \equiv \text{const}$ на $[-b_1, b_1]$. Аналогично получим, что на двух интервалах общей длины $2 \times 2b_1 a^{-1}$ функция $h_a(x)$ — многочлен первой степени, на четырех интервалах общей длины $4 \times 2b_1 a^{-2}$ $h_a(x)$ — многочлен второй степени и т. д. Мера множества Pol_a тех $x \in \text{supp } h_a(x)$, у которых есть окрестность, где $h_a(x)$ — многочлен, составляет:

$$\mu(Pol_a) = 2b_1 + 2b_1 \frac{2}{a} + 2b_1 \left(\frac{2}{a}\right)^2 + \dots = 2b_1 \frac{1}{1 - \frac{2}{a}} = 2b, \quad (3.39)$$

т. е. $\mu(Pol_a) = \mu(\text{supp } h_a(x))$.

Таким образом, $h_a(x)$ при $a > 2$ на множестве полной меры — многочлен, а на оставшемся множестве sing_a (нигде не плотном, типа известного канторова множества) меры 0 — неаналитическая функция (действительно, ряд Тейлора функции $h_a(x)$ в точках множества sing_a либо состоит из конечного числа членов и не сходится, следовательно, к $h_a(x)$, либо имеет нулевой радиус сходимости). Итак, в полученном примере функций класса $C^\infty(\mathbb{R})$ почти в каждой точке ряд Тейлора — многочлен, но функции тем не менее не являются многочленами и не аналитичны.

Поскольку кусочно-полиномиальные функции называются сплайнами, то функции $h_a(x)$ при $a > 2$ естественно причислить к сплайнам класса C^∞ .

Вычислим значения $h_a(x)$ при $a > 2$. Пусть Sing_a^1 — множество тех точек из Sing_a , в которых ряд Тейлора — многочлен. Поскольку $h_a(x)$ — четная функция, рассмотрим только интервал $[-b, 0]$. Из (3.22) получаем

$$\begin{aligned} h(-b_1) &= \int_{-b}^{b_1} h'_a(x) dx = -\lambda \int_{-b}^{b_1} h_a(ax+1) dx = \\ &= -\frac{\lambda}{a} \int_{-b}^b h_a(x) dx = -\frac{\lambda}{a}. \end{aligned}$$

Таким образом, на $[-b_1, b_1]$ $h_a(x) = -\frac{\lambda}{a}$, а так как (см. (3.20)) $\lambda = -\frac{a^2}{2}$, то

$$h_a(x) = \frac{a}{2}. \quad (3.40)$$

Поэтому

$$\int_{-b_1}^{b_1} h_a(x) dx = ab_1 = \frac{a-2}{a-1} \quad (3.41)$$

и, следовательно,

$$\int_{-b}^{b_1} h_a(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{a-2}{a-1}. \quad (3.42)$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_a\left(-b + \frac{b-b_1}{a}\right) &= \int_{-b}^{-b + \frac{b-b_1}{a}} h'_a(x) dx = -\lambda \int_{-b}^{-b + \frac{b-b_1}{a}} h_a(ax+1) dx = \\ &= -\frac{\lambda}{a} \int_{-b}^{b_1} h_a(x) dx = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{a-2}{a-1} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Далее,

$$\begin{aligned} h'_a\left(-b + \frac{b-b_1}{a}\right) &= \int_{-b}^{-b + \frac{b-b_1}{a}} h''_a(x) dx = \\ &= \lambda^2 a \int_{-b}^{-b + (b-b_1)a^{-1}} h_a(a^2x + a + 1) dx = \frac{\lambda^2}{a} \int_{-b}^b h_a(x) dx = \frac{a^3}{4}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Поэтому на $\left[-b + \frac{b-b_1}{a}, -b_1 - \frac{b-b_1}{a}\right]$

$$h_a(x) = \frac{a^3}{4} \left(x + b - \frac{b-b_1}{a}\right) + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{a-2}{a-1}\right). \quad (3.45)$$

Продолжая таким же образом, можно вычислить коэффициенты всех многочленов, из которых «составлена» функция $h_a(x)$, причем эти коэффициенты будут рациональным образом выражаться через a .

Между моментами функции $h_a(x) \int_{-b}^b x^{2n} h_a(x) dx$ (а следовательно, и коэффициентами $c_{2k}(a)$) и значениями функции $h_a(x)$ в некоторых точках существует следующая связь. По формуле Тейлора

$$h_a(x) = \sum_{k=0}^n \frac{h_a^{(k)}(-b)}{k!} (x+b)^k + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-b}^x h_a^{(n+1)}(\tau) (x - \tau)^n d\tau. \quad (3.46)$$

Но $h_a^{(k)}(-b) = 0$, $k \in N$. Поэтому

$$h_a(x) = R_n(x). \quad (3.47)$$

Из (3.46) и (3.23) видно, что значения $h_a(x)$ в точках $x \in \text{Sing}_a^1$ есть линейные комбинации моментов функции $h_a(x)$.

Найдем выражения для $h_a^{(n)}(x)$ и опишем точки $x \in \text{Sing}_a^1$. Из (3.23) следует

$$\begin{aligned} h_a^{(n)}(x) = \lambda^2 a (h_a(ax + a + 1) - h_a(a^2x + a - 1)) - \\ - h_a(a^2x - a + 1) + h_a(a^2x - a - 1). \end{aligned} \quad (3.48)$$

В итоге, продолжая дифференцировать $h_a(x)$ с использованием (3.23), получаем

$$h_a^{(n)}(x) = |\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=1}^{2n} \delta_k h_a(a^n x + \sum_{j=1}^n a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)}), \quad (3.49)$$

где $p_j(k)$ — число, состоящее в j -м разряде двоичного разложения числа k (т. е. числа k , записанного в двоичной системе счисления). Числа δ_k определяются следующим рекуррентным соотношением: $\delta_{2k} = -\delta_k$, $\delta_{2k-1} = \delta_k$, $\delta_1 = 1$.

Теперь опишем точки множества Sing_a^1 . Точка $x_0 \in \text{Sing}_a^1$ в том и только в том случае, если существует натуральное n и набор знаков \pm или $-$ такой, что

$$a^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k) = \pm b,$$

т. е.

$$x_0 = \left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k) \right) a^{-n}. \quad (3.50)$$

Пусть $x_0 \in \text{Sing}_a^1$. Величины $h_a^{(l)}(x_0)$ согласно (3.49) выражаются через значения $h_a(x)$ в точках вида

$$x_1 = a^l x_0 + \sum_{i=0}^{l-1} (\pm a^i).$$

Подставим вместо x_0 его значение из (3.50):

$$\begin{aligned} x_1 &= a^{l-n} \left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k) \right) + \sum_{i=0}^{l-1} (\pm a^i) = \\ &= a^{l-n} \left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k) + \sum_{k=n-i}^{n-1} (\pm a^k) \right). \end{aligned}$$

Достаточно считать, что $0 < l < n$, поскольку при $n \leq l$ $h_a^{(l)}(x_0) = 0$. Покажем, что для тех наборов знаков в сумме $\Sigma_I = \sum_{k=0}^{n-1} (\pm a^k)$, для которых при $n-l \leq k < n-1$ хотя бы один из знаков при той же степени a в сумме

$$\Sigma_{II} = \sum_{k=n-l}^{n-1} (\pm a^k)$$

не противоположен, выполняется неравенство $|x_1| \geq b$ и, следовательно, $h_a(x_1) = 0$. Действительно, пусть $k_1, k_1 \geq n-l$, — наибольшее из тех k , для которых у данных наборов знаков в Σ_I и Σ_{II} знаки при a^k одинаковы. Тогда

$$\begin{aligned} |\Sigma_I + \Sigma_{II}| &> 2a^{k_1} - 2 \sum_{k=n-l}^{k_1} a^k - \sum_{k=0}^{n-l-1} a^k = \frac{2(a^{k_1+1} - 2a^{k_1})}{a-1} + \\ &+ \frac{a^{n-l}}{a-1} + \frac{1}{a-1} \geq \frac{a^{n-l}}{a-1} + b \end{aligned}$$

(так как $a > 2$). Поэтому

$$|a^{l-n}(\pm b + \Sigma_I + \Sigma_{II})| > \frac{1}{a-1} = b.$$

Для того (единственного) набора знаков в Σ_{II} , у которого знаки при $k \geq n-l$ противоположны знакам Σ_I ,

$$x_1 = a^{l-n} \left(\pm b + \sum_{k=0}^{n-l-1} (\pm a) \right)$$

и в силу (3.50) $x_1 \in \text{Sing}_a^1$. Следовательно, и производные функции $h_a(x)$ в точках Sing_a^1 рациональным образом выражаются через a и $c_{2k}(a)$ (т. е. в конце концов через a).

Пусть $1 \leq m \leq 2^n$, а $x_m^{(n)} \in \text{Sing}_a^1$ имеет вид

$$x_m^{(n)} = \left(b - \sum_{k=0}^{n-1} a^k (-1)^{p_{k+1}(m-1)} \right) a^{-n}. \quad (3.51)$$

Тогда согласно (3.47) и (3.49)

$$\begin{aligned} h_a(x_m^{(n)}) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{-b}^{x_m^{(n)}} h_a^{(n)}(\tau) (x_m^{(n)} - \tau)^{n-1} d\tau = \\ &= \frac{|\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!} \int_{-b}^{x_m^{(n)}} \sum_{k=1}^m \delta_k h_a \left(a^n \tau + \sum_{j=1}^n a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)} \right) \times \\ &\times (x_m^{(n)} - \tau)^{n-1} d\tau = \frac{|\lambda|^n a^{\frac{(n-1)n}{2}}}{(n-1)!} \sum_{k=1}^m \delta_k \int_{-b}^{x_m^{(n)}} h_a \left(a^n \tau + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^n a^{j-1} (-1)^{p_j(k-1)} \right) (x_m^{(n)} - \tau)^{n-1} d\tau. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Сделаем в k -м интеграле в (3.52) замену

$$t = a^n \tau + \sum_{i=1}^n a^{i-1} (-1)^{p_{i(k-1)}}.$$

Получим

$$h_a(x_m^{(n)}) = \frac{|\lambda|^n a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!} a^{-n} \sum_{k=1}^m \delta_k \int_{-b}^b h_a(t) \left(x_m^{(n)} - \left(t + \sum_{i=0}^{n-1} a^i (-1)^{p_{i+1(k-1)}} \right) a^{-n} \right)^{n-1} dt. \quad (3.53)$$

Отсюда $\left(|\lambda| = \frac{a^2}{2} \right)$

$$\begin{aligned} h_a(x_m^{(n)}) &= \frac{a^{2n} a^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)! 2^n} a^{-n} a^{-n(n-1)} \sum_{k=1}^m \delta_k \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} C_{n-1}^{2l} \beta_{m,k,n}^{n-1-2l} \int_{-b}^b h_a(t) t^{2l} dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)! 2^n} a^{-\frac{n(n-3)}{2}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} C_{n-1}^{2l} (-1)^l (2l)! c_{2l}(a) \sum_{k=1}^m \delta_k \beta_{m,k,n}^{n-1-2l}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где

$$\beta_{m,k,n} = b + \sum_{i=0}^{n-1} a^i \left((-1)^{p_{i+1(k-1)}} - (-1)^{p_{i+1(m-1)}} \right).$$

Например, для $m = 1$, т. е. $x_1^{(n)} = -b + 2ba^{-n}$,

$$h_a(x_1^{(n)}) = \frac{a^{-\frac{n(n-3)}{2}}}{(n-1)! 2^n} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} C_{n-1}^{2l} (-1)^l (2l)! c_{2l}(a) b^{n-1-2l}. \quad (3.55)$$

Выведем формулу для $h_a^{(l)}(x_m^{(n)})$. Из (3.49) следует

$$h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) = |\lambda|^l a^{\frac{l(l-1)}{2}} \delta_s h_a \left(a^l x_m^{(n)} + \sum_{i=0}^{l-1} a^i (-1)^{p_{i+1(s-1)}} \right), \quad (3.56)$$

где s определяется из формулы $p_i(s-1) = p_{i+n-l}(m-1)$: $s = [m2^{l-n}]$. Таким образом,

$$\begin{aligned} h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) &= |\lambda|^l a^{\frac{l(l-1)}{2}} \delta_s h_a \left(a^{l-n} \left(b - \sum_{k=0}^{n-1} a^k (-1)^{p_{k+1(m-1)}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=0}^{l-1} a^i (-1)^{p_{i+1(s-1)}} \right) \right) = \frac{a^{\frac{l(l+3)}{2}}}{2^l} \delta_s h_a(x_r^{(n-l)}), \end{aligned} \quad (3.57)$$

где $r = m - [m2^{l-n}] 2^{n-l} + 1$. Окончательно получаем

$$h_a^{(l)}(x_m^{(n)}) = \frac{a^{-\frac{(n-l)(n-l+3)}{2} + \frac{l(l+3)}{2}}}{2^n (n-l-1)!} \delta_s \times \\ \times \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-l-1}{2}\right]} C_{n-l-1}^{2j} (-1)^j (2j)! c_{2j}(a) \sum_{k=1}^r \delta_k \beta_{r,k,n-l}^{n-l-1-2j}. \quad (3.58)$$

Итак, на интервале $[x_m^{(n)}, x_m^{(n)} + 2b_1 a^{-n+1}]$ функция $h_a(x)$ — многочлен степени $n-1$ вида

$$h_a(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{h_a^{(l)}(x_m^{(n)})}{l!} (x - x_m^{(n)})^l, \quad (3.59)$$

где $h_a^{(l)}(x_m^{(n)})$ вычисляются по формуле (3.58).

§ 3. ФУНКЦИЯ $\text{up}(x)$

Рассмотрим $h_a(x)$ при $a = 2$. По определению $h_2(x) = \text{up}(x)$. Функция $\text{up}(x)$, введенная в работе [52], исследовалась в работах [53—57, 59, 60, 66]. Из (3.24) следует

$$\text{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt. \quad (3.60)$$

Функция $\text{up}(x)$ — решение уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1), \quad (3.61)$$

причем

$$\text{supp up}(x) = [-1, 1]. \quad (3.62)$$

Производная n -го порядка функции $\text{up}(x)$ вычисляется по формуле

$$\text{up}^{(n)}(x) = 2^{C_{n+1}^2} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k \text{up}(2^n x + 2^n + 1 - 2k). \quad (3.63)$$

Легко заметить, что

$$\|\text{up}^{(n)}(x)\|_{C[-1,1]} = \|\text{up}^{(n)}(x)\|_{L[-1,1]} = 2^{C_{n+1}^2}. \quad (3.64)$$

В точках вида $k2^{-n}$ (т. е. двоично-рациональных) ряд Тейлора функции $\text{up}(x)$ — многочлен степени n . Нетрудно убедиться, что в остальных точках носителя $\text{up}(x)$ — отрезка $[-1, 1]$ — ряд Тейлора этой функции имеет нулевой радиус сходимости. Таким образом, в то время как функции $h_a(x)$ при $a > 2$ аналитичны на множестве полной меры, функция $\text{up}(x)$ неаналитична ни в одной точке носителя. Повторяя рассуждения § 2, можно вычислить значения функции $\text{up}(x)$ в двоично-рациональных точках, выразив их через момен-

ты функции $\text{up}(x)$. Приведем формулы для этих моментов:

$$2b_{2k} = a_{2k} = \int_{-1}^1 x^{2k} \text{up}(x) dx = (-1)^k c_{2k} (2) (2k)!; \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= \int_0^1 x^{2k+2} \text{up}(x) dx = - \int_0^1 \frac{x^{2k+2}}{2k+2} \text{up}'(x) dx = \\ &= \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^{2k+2} \text{up}(2x-1) dx = \frac{1}{2k+2} \int_{-1}^1 \left(\frac{u+1}{2}\right)^{2k+2} \text{up}(u) du = \\ &= \frac{1}{2^{2k+2} (2k+2)} \sum_{j=0}^{k+1} C_{2k+2}^{2j} a_{2j}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Теперь по формуле Тейлора получаем

$$\begin{aligned} \text{up}(-1 + k2^{-n}) &= \frac{1}{n!} \int_{-1}^{-1+k2^{-n}} \text{up}^{(n+1)}(\tau) (-1 + k2^{-n} - \tau)^n d\tau = \\ &= \frac{2^{C_{n+2}^2}}{n!} \sum_{j=1}^k \delta_j \int_{-1}^{-1+k2^{-n}} \text{up}(2^{n+1}\tau + 2^{n+1} + 1 - 2j) (-1 + k2^{-n} - \tau)^n d\tau = \\ &= \frac{2^{C_{n+2}^2 - (n+1)}}{n!} \sum_{j=1}^k \delta_j \int_{-1}^1 \text{up}(t) (-1 + k2^{-n} - (t - 2^{n+1} - 1 + 2j)) \times \\ &\times 2^{-(n-1)n} dt = \frac{2^{C_{n+2}^2 - n - 1 - n^2}}{n!} \sum_{j=1}^k \delta_j \int_{-1}^1 \text{up}(t) \left(k - j + \frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^n dt = \\ &= \frac{2^{-n^2 - n - 1 + C_{n+2}^2}}{n!} \sum_{j=1}^k \delta_j \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2l} \left(k - j + \frac{1}{2}\right)^{n-2l} a_{2l} 2^{-2l}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Для точек вида $-1 + 2^{-n}$ поступим следующим образом [59]:

$$\begin{aligned} \text{up}(-1 + 2^{-n}) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{-1}^{-1+2^{-n}} \text{up}^{(n)}(\tau) (-1 + 2^{-n} - \tau)^{n-1} d\tau = \\ &= \frac{2^{C_{n+1}^2}}{(n-1)!} \int_{-1}^{-1+2^{-n}} \text{up}(2^n\tau + 2^n + 1 - 2) (-1 + 2^{-n} - \tau)^{n-1} d\tau = \\ &= \frac{2^{C_{n+1}^2 - n}}{(n-1)!} \int_0^1 \text{up}(t) t^{n-1} dt \cdot 2^{-n(n-1)} = \frac{b_{n-1}}{2^{C_n^2} (n-1)!}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

По формуле (3.63) найдем

$$\text{up}^{(l)}(-1 + 2^{-n}) = 2^{C_{l+1}^2} \text{up}(-1 + 2^{l-n}) = \frac{2^{C_{l+1}^2 - C_{n-l}^2}}{(n-l-1)!} b_{n-l-1}. \quad (3.69)$$

Получим теперь формулу для вычисления функции $\text{up}(x)$ при любом x . Достаточно рассмотреть случай $-1 \leq x \leq 0$, так как функция $\text{up}(x)$ четная. Для функции $\varphi_n(x) = \text{up}(x) + \text{up}(x - 2^{-n})$ на интервале $[-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$ получаем $\varphi_n^{n+1}(x) \equiv 0$, так как $\delta_2 = -\delta_1$. Следовательно, на этом интервале

$$\varphi_n(x) = \sum_{l=0}^n \frac{\varphi_n^{(l)}(-1 + 2^{-n})}{l!} (x + 1 - 2^{-n})^l, \quad (3.70)$$

причем $\varphi_n^{(l)}(-1 + 2^{-n}) = \text{up}^{(l)}(-1 + 2^{-n})$, так как $\text{up}^{(l)}(-1) = 0$. Таким образом, для $x \in [-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$

$$\text{up}(x) = \sum_{l=0}^n \frac{\text{up}^{(l)}(-1 + 2^{-n})}{l!} (x + 1 - 2^{-n})^l - \text{up}(x - 2^{-n}), \quad (3.71)$$

т. е. для того чтобы вычислить функцию $\text{up}(x)$ на $[-1 + 2^{-n}, -1 + 2^{-n+1}]$, нужно знать ее значения на $[-1, -1 + 2^{-n}]$. Разбивая интервал $[-1, -1 + 2^{-n}]$ на интервалы $[-1, -1 + 2^{-n-1}]$ и $[-1 + 2^{-n-1}, -1 + 2^{-n}]$ и повторяя те же выкладки, можем свести вычисление функции $\text{up}(x)$ на интервале $[-1 + 2^{-n-1}, -1 + 2^{-n+1}]$ к вычислению ее на $[-1, -1 + 2^{-n-1}]$. Тем самым получаем возможность записать некоторый ряд для вычисления значений функции $\text{up}(x)$, причем ряд быстро сходится. Действительно, на $[-1, -1 + 2^{-n}]$

$$0 \leq \text{up}(x) \leq \text{up}(-1 + 2^{-n}),$$

$$\text{up}(-1 + 2^{-n}) = \frac{b_{n-1}}{2^{C_n^2} (n-1)!}.$$

Следовательно, используя оценку (3.38) для $c_{2k}(a)$, получим

$$\text{up}(-1 + 2^{-n}) \leq \frac{a_2 \left[\frac{n-1}{2} \right]}{2^{C_n^2} (n-1)!} < \frac{C_9}{2^{C_{n+2}^2 \left[\frac{n-1}{2} \right] (2 \left[\frac{n-1}{2} \right] + 1)}}. \quad (3.72)$$

Выпишем этот ряд для $0 \leq x < 1$:

$$\text{up}(x-1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{s_{k+1}} p_k \sum_{j=0}^k \frac{2^{C_{j+1}^2} b_{k-j-1}}{2^{C_{k-j}^2} (k-j-1)! j!} (x-0, p_1 \dots p_k)^j; \quad (3.73)$$

$$b_{-1} = 1, \quad 0! = (-1)! = 1, \quad s_k = \sum_{j=1}^k p_j.$$

Здесь величины b_l , $l > 0$, вычисляются по формулам (3.65), (3.66), а $x = 0, p_1 \dots p_k \dots$ — запись числа x в двоичной системе счисления.