

CHAPITRE 2

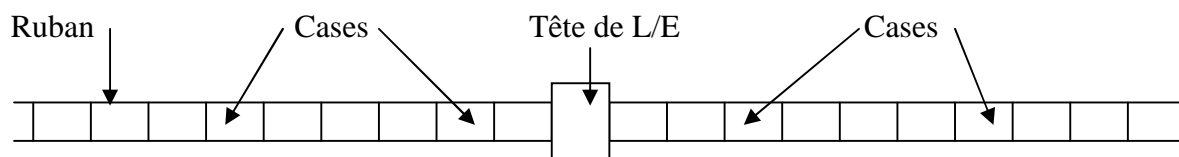
CALCULABILITE

2^{ème} Partie : LA MACHINE DE TURING

1) DEFINITION :

Une Machine de Turing MT consiste en une entité « mécanique » :

- comportant un ruban (potentiellement) infini dans les deux directions, organisé en cases (ou cellules) de tailles égales où des symboles sont imprimés,
- disposant d'une tête de lecture/écriture (L/E), qui à chaque instant examine une case et peut éventuellement y imprimer un symbole,
- à laquelle est associé à chaque instant un paramètre appelé état interne de la MT.



Notation et Conventions :

$S = \{ S_0, S_1, S_2, \dots, S_n \}$ représente un ensemble fini de symboles.

$E = \{ q_0, q_1, q_2, \dots, q_f \}$ représente un ensemble fini d'états internes.

S_0 : représente le symbole Blanc : noté 0

S_1 : représente le symbole Barre : noté 1

S_2 : représente le symbole Etoile : noté *

q_0 : représente l'état interne initial

q_f : représente l'état interne final

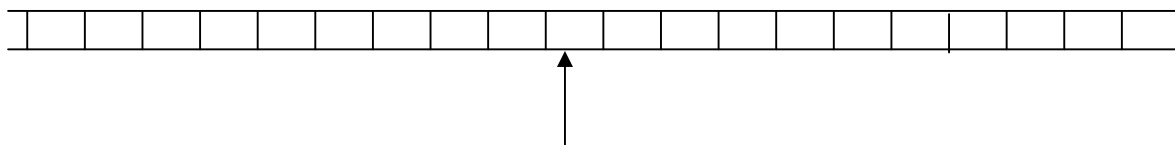
Initialement toutes les cases du ruban sont à blanc (à 0).

Nous utiliserons par la suite une flèche pour représenter la position de la tête de L/E sur le ruban.

2) FONCTIONNEMENT DE LA MACHINE DE TURING :

Le fonctionnement de la MT à un instant t est déterminé par :

Soient S_i le symbole lu par la tête de L/E et q_j l'état interne dans lequel se trouve la MT.



Trois actions (opérations) peuvent être déclenchées, en dehors de la situation d'arrêt :

- Impression d'un symbole S_r (à la place de S_i) et la MT se place à l'état q_t .
- Déplacement d'une case à droite et la MT se place à l'état q_t .

- Déplacement d'une case à gauche et la MT se place à l'état q_t .
- Arrêt : aucune action.

L'état interne de la MT et le symbole lu par la tête de L/E détermine donc le début d'une instruction qui sera représentée par un 4 – uplets avec l'une des 3 formes suivantes, associée respectivement à chacune des 3 actions :

- $q_j S_i S_r q_t$ Impression du symbole S_r .
- $q_j S_i D q_t$ Déplacement d'une case à droite .
- $q_j S_i G q_t$ Déplacement d'une case à gauche .

Remarque :

Le cas où la MT reste à l'arrêt correspond au cas où aucune instruction n'est disponible avec pour paire de tête $q_j S_i \dots$

Le fonctionnement de la MT est donc entièrement défini par un ensemble d'instructions.

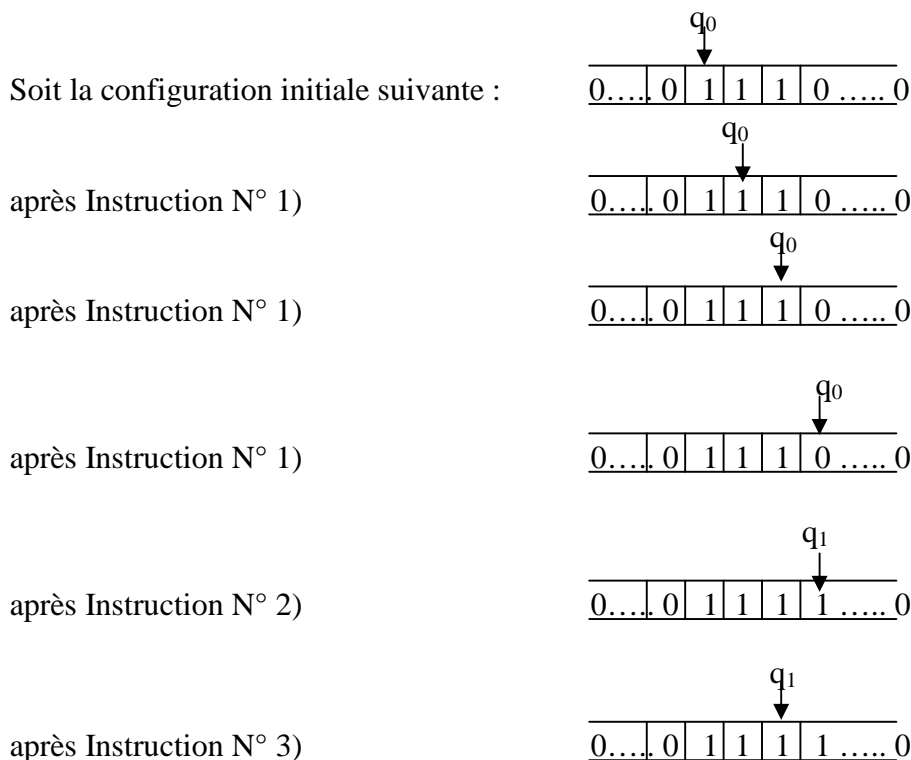
Par ailleurs, nous optons pour une approche déterministe : une seule instruction peut être déclenchée à la fois ; au quel cas dans un ensemble d'instructions nous n'autorisons pas l'existence de 2 instructions possédant une même paire de tête.

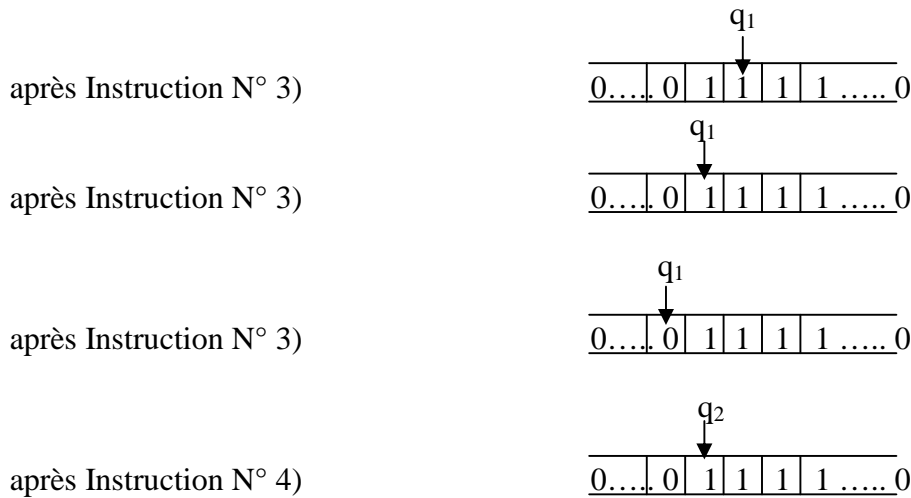
EXEMPLE :

$$S = \{ 0, 1 \}$$

$$E = \{ q_0, q_1, q_2 \}$$

$$\text{Instructions} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 -) q_0 1 D q_0 & 2 -) q_0 0 1 q_1 \\ 3 -) q_1 1 G q_1 & 4 -) q_1 0 D q_2 \end{array} \right\}$$





Arrêt : configuration finale (aucune instruction ne peut être déclenchée).

3) REPRESENTATION DES ENTIERS NATURELS :

La représentation d'un entier X est notée X. Concrètement l'entier X est représenté par (x+1) barres, de manière à pouvoir représenter le nombre 0. Donc :

$$\begin{aligned} \underline{0} &=_{\text{def}} 1 = 1^1 \\ \underline{1} &=_{\text{def}} 11 = 1^2 \\ \underline{2} &=_{\text{def}} 111 = 1^3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \underline{n} &=_{\text{def}} 11\dots 11 \text{ (n+1 fois)} = 1^{n+1} \end{aligned}$$

On convient de plus que 1^0 représente 0 (l'absence de symbole) et que $S^n = S \dots S$ (n fois) quelque soit le symbole S.

Remarque :

Cette représentation permet de présenter l'exemple précédent de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0q_01^30 & \longrightarrow & 01q_01^20 & \longrightarrow & 01^2q_010 & \longrightarrow & 01^3q_00 & \longrightarrow & 01^3q_11 & \longrightarrow \\ 01^2q_11^2 & \longrightarrow & 01q_11^3 & \longrightarrow & 0q_11^40 & \longrightarrow & 0q_101^40 & \longrightarrow & 0q_21^40 & \text{ Arrêt.} \end{array}$$

Nous constatons que : $q_01^3 \longrightarrow 0q_21^4$ c-à-d 2 \longrightarrow 3 , en fait nous

pouvons montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad q_0\underline{n} \longrightarrow q_2\underline{n+1}$

4) REPRESENTATION DES N- UPLETS :

Pour représenter les uplets, le symbole Etoile « * » est utilisé pour séparer les nombres ; ainsi :

$$(n, m) =_{\text{def}} \underline{n} * \underline{m}$$

$$(n_1, n_2, \dots, n_p) =_{\text{def}} \underline{n_1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p}$$

5) LES FONCTIONS TURING CALCULABLES :Définition :

Soient F une fonction de $\text{IN}^p \longrightarrow \text{IN}^q$ et MT une machine de Turing déterminée par (S, E, I) où I est l'ensemble des instructions associées à MT .

La fonction F est dite calculable par la machine de Turing MT si étant donnée la configuration initiale suivante : $q_0 \underline{n_1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p}$, et en appliquant les instructions I de MT , nous arrivons à une situation d'arrêt avec la configuration finale suivante : $q_f \underline{F(n_1, n_2, \dots, n_p)}$.

$$\text{Autrement dit : } q_0 \underline{n_1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_f \underline{F(n_1, n_2, \dots, n_p)}$$

EXEMPLE 1 :

Déterminer la MT qui calcule la fonction $Z = \lambda n . 0$, c-à-d

$$\forall n \in \text{IN} \quad q_0 \underline{n} \longrightarrow q_f \underline{0}$$

ou bien $q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1$

La MT qui calcule la fonction Z est donnée par : $MT_Z = (S, E, I)$ où :

$$S = \{ 1, 0 \},$$

$$E = \{ q_0, q_1, q_2 \}$$

et

$$I = \{ \begin{array}{l} 1-) q_0 10 q_1 \quad \text{Tant que le symbole lu est un 1, remplacer le par 0 ...} \\ 2-) q_1 0D q_0 \quad \text{.... puis se déplacer à droite} \\ 3-) q_0 01 q_2 \quad \text{à la rencontre du 0, remplacer le par 1 puis arrêter.} \\ \end{array} \}$$

EXEMPLE 2 :

Déterminer la MT qui calcule la fonction $S = \lambda n . n+1$, c-à-d

$$\forall n \in \text{IN} \quad q_0 \underline{n} \longrightarrow q_f \underline{n+1}$$

ou bien $q_0 1^{n+1} \longrightarrow q_f 1^{n+2}$

La MT qui calcule la fonction S est donnée par : $MT_S = (S, E, I)$ où :

$$S = \{ 1, 0 \},$$

$E = \{ q_0, q_1, q_2 \}$
 et

$I = \{$
 1-) $q_0 1D q_0$ Tant que le symbole lu est un 1, se déplacer à droite
 2-) $q_0 0I q_1$ à la rencontre du 0, remplacer le par 1
 3-) $q_1 1G q_1$ se déplacer à gauche jusqu'au premier 0
 4-) $q_1 0D q_2$ se déplacer à droite puis s'arrêter sur le 1 le plus à gauche.
 $\}$

EXEMPLE 3 :

Déterminer la fonction F de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calculée par la MT définie par (S, E, I) où

$S = \{ 1, 0 \}$,

$E = \{ q_0, q_1 \}$

et

$I = \{$
 1-) $q_0 1G q_0$ Se déplacer à gauche
 2-) $q_0 0I q_1$ remplacer le symbole 0 par symbole 1 puis s'arrêter.
 $\}$

La fonction F recherchée est telle que :

$$q_0 \underline{n} \longrightarrow q_f \underline{F(n)} ?$$

Déroulons la MT :

• Pour $n = 0$:

$$00q_010 \longrightarrow 0q_0010 \longrightarrow 0q_1110 \quad \text{c-à-d} \quad q_0 \underline{0} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1 \underline{1}$$

• Pour $n = 1$:

$$00q_0110 \longrightarrow 0q_00110 \longrightarrow 0q_11110 \quad \text{c-à-d} \quad q_0 \underline{0} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1 \underline{2}$$

• Pour n quelconque de \mathbb{N} :

$$00q_01^{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow 0q_001^{n+1}0 \longrightarrow 0q_11^{n+2}0 \quad \text{c-à-d} \quad q_0 \underline{n} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1 \underline{n+1}$$

$$\text{En conclusion} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad q_0 \underline{n} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1 \underline{n+1}$$

La fonction F calculée par MT est donc la fonction S (Vue précédemment).

Remarques Importantes :

1) Une même fonction peut être calculée par plusieurs machine de Turing différentes. Par exemple, la fonction S est calculée par deux MT différentes (voir exemples 2 et 3).

2) Une même machine de Turing peut calculer plusieurs fonctions différentes. En effet pour la MT précédente (exemple 3), nous avons :

$$* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad q_0 \underline{n} \xrightarrow{\text{I de MT}} q_1 \underline{n+1}$$

F_1 de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $F_1(n) = S(n) = n+1$

$$* \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad q_0 \underline{n} * \underline{m} \xrightarrow{I \text{ de MT}} q_1 \underline{n+1} * \underline{m}$$

$$F_2 \text{ de } \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^2 \text{ telle que } F_2(n, m) = (n+1, m)$$

*

$$* \forall (n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p \quad q_0 \underline{n_1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p} \xrightarrow{I \text{ de MT}} q_f \underline{n_1+1} * \underline{n_2} * \dots * \underline{n_p}$$

$$F_p \text{ de } \mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^p \text{ telle que } F_p(n_1, n_2, \dots, n_p) = (n_1 + 1, n_2, \dots, n_p)$$

6) COMPOSITION DE MACHINES DE TURING :

Théorème :

Soient deux machines de Turing :

- MT1 (S1, E1, I1) qui calcule la fonction F1 de $\mathbb{N}^p \longrightarrow \mathbb{N}^q$

- MT2 (S2, E2, I2) qui calcule la fonction F2 de $\mathbb{N}^q \longrightarrow \mathbb{N}^r$

telle que S1 = S2 .

Alors la machine de Turing MT (S, E, I) définie par :

$$S = S1 = S2$$

$$E = E1 \cup E'2$$

$$I = I1 \cup I'2 \cup \{ q_{f1} \ 1 \ 1 \ q'_{i2} \} \quad \text{où}$$

E'2 et I'2 sont obtenus à partir de E2 et I2 en remplaçant chaque q_i par q'_i (renommage des noms des états dans E2 et I2) de manière à ce que $E1 \cap E2 = \emptyset$ et $I1 \cap I2 = \emptyset$,

Permet de calculer la fonction composée (F2 o F1).

La machine MT est considérée comme étant la composition des machines MT1 et MT2 notée : (MT2 o MT1).

Lemme :

Les fonctions de Base : Z, S et P_n^i sont des fonctions calculables par des machines de Turing.