০২। ভেক্টর
(Vector)

নোটটি নূতন কারিকুলামের পরীক্ষার্থীদের জন্য লেখা

মো: শাহ্ জামাল
সহকারী অধ্যাপক (পদার্থবিজ্ঞান বিভাগ)
বি এ এফ শাহীন কলেজ ঢাকা
ফোন: 01670 856105, 9125630, 9115369
e-mail: sjamal59@gmail.com

ভেক্টর রাশি (*Vector Quantities*):

যে সকল ভৌত রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয় তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে। **যেমন- সরণ, ওজন, বেগ, ত্বরণ, বল ইত্যাদি।**

স্কেলার রাশি (*Scalar Quantities*):

যে সকল ভৌত রাশিকে শুধু মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে। যেমন- দ্রুতি, ভর, কাজ, দৈর্ঘ্য ইত্যাদি

একক ভেক্টর (*Unit Vector*):

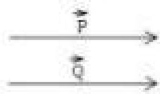
যে ভেক্টরের মান এক তাকে একক ভেক্টর বলে। মান শূন্য নয় এমন ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ দিক রাশিটির দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়। মনে করি $\vec{A}$ একটি ভেক্টর রাশি; $\vec{A} \neq 0 \therefore \vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর $= \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \hat{a}$ (ধরি)

সীমাবদ্ধ ভেক্টর (*Restricted Vector*):

যে ভেক্টরের আদি বিন্দু কোথায় থাকে তা স্থির থাকে তাকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে। O বিন্দুতে $\vec{P}$ বল OB রেখা বরাবর ক্রিয়া করে বুঝালে ভেক্টর $\vec{P}$ সীমাবদ্ধ ভেক্টর যার পাদ বিন্দু O।

সমান ভেক্টর (*Equal Vector*):

একই দিকে ক্রিয়ারত দু'টি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে সমভেক্টর বা সমান ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ সমান ভেক্টর।

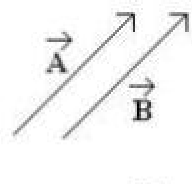


শূন্য বা নাল ভেক্টর (*Zero or Null Vector*):

যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে শূন্য বা নাল ভেক্টর বলে। নাল ভেক্টরের আদি ও শেষ বিন্দু একই বিন্দুতে অবস্থিত।

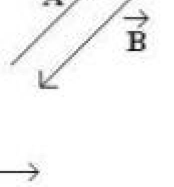
সদৃশ ভেক্টর বা সমান্তরাল ভেক্টর (*Like Vector*):

সমজাতীয় দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বা সমান্তরাল ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সদৃশ ভেক্টর বা সমান্তরাল ভেক্টর।



বিসদৃশ ভেক্টর (*Unlike Vector*):

সমজাতীয় দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বিসদৃশ ভেক্টর।



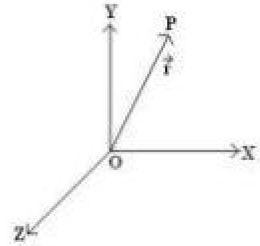
সমরেখ ভেক্টর (*Co-linear Vector*):

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই সরলরেখা বরাবর বা পরস্পর সমান্তরালে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ সমরেখ ভেক্টর।

অবস্থান ভেক্টর (*Position Vector*):

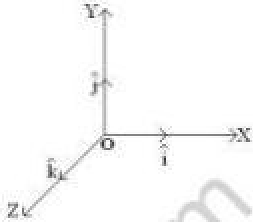
প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য যে ভেক্টর ব্যবহার করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

ব্যাখ্যা ঃ চিত্রে O হচ্ছে প্রসংগ কাঠামোর মূল বিন্দু এবং যে P কোন একটি বিন্দু।



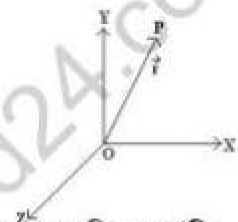
$\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করছে। তাই $\overrightarrow{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর।

অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\therefore \overrightarrow{OP} = \vec{r}$



আয়তএকক ভেক্টর *(Rectangular Unit Vector)*:

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় পরস্পর লম্ব তিনটি অক্ষ থাকে। যথা ঃ X, Y এবং Z অক্ষ। X অক্ষের দিকে বিভিন্ন ভেক্টরকে প্রকাশ করার জন্য একটি একক ভেক্টর $\hat{i}$ ব্যবহার করা হয়। তেমনি $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ যথাক্রমে Y ও Z অক্ষের দিকে একক ভেক্টর (ডান পার্শ্বের চিত্র)। $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ কে আয়তএকক ভেক্টর বলে।



ব্যাসার্ধ ভেক্টর *(Radius Vector)*: অনেক সময় কোন বিন্দুর অবস্থানকে যে ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় তাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r}$ বলে। সুতরাং কোন বিন্দু P-এর স্থানাংক (x,y,z) হলে, ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এবং এর মান হয় $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

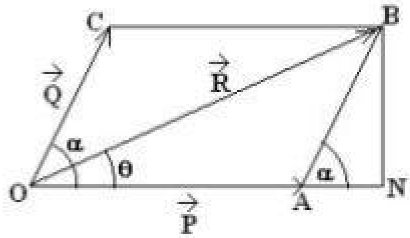
ভেক্টর রাশির সামান্তরিক সূত্র *(Law of Parallelogram)* বর্ণনা ও ব্যাখ্যা :

বর্ণনা: কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দু'টি ভেক্টর রাশিকে যদি কোন এক বিন্দু থেকে অংকিত সামান্তরিকের দু'টি সন্নিহিত বাহু দ্বারা নির্দেশ করা যায় তবে ঐ বিন্দু থেকে অংকিত সামান্তরিকের কর্ণই ভেক্টর দু'টির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

মনেকরি একটি কণার উপর একই সময়ে দু'টি দিকরাশি P ও Q, α কোণে ক্রিয়া করছে। OA এবং OC রেখা দু'টি যথাক্রমে P ও Q মান এবং তীর চিহ্ন এদের দিক নির্দেশ করছে। এখানে $\angle AOC = \alpha$ । এই দু'টি দিক রাশির লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে হবে।

অংকন : সামান্তরিক OABC অংকন করে কর্ন OB যুক্ত করি। তাহলে OB কর্নই দিকরাশি দু'টির মান ও দিক নির্দেশ করবে। মনে করি লব্ধির মান R এবং কোণ α একটি সুক্ষকোণ। এখন B বিন্দু থেকে OA এর বর্ধিত অংশের উপর BN লম্ব টানি।

লব্ধির মান নির্ণয়ঃ AB ও OC সমান্তরাল। $\therefore \angle AOC = \alpha$ । OBN ত্রিভুজের $\angle ONB =$ এক সমকোন।



$$\therefore\ OB^2 = ON^2 + BN^2$$
$$\Rightarrow OB^2 = (OA+AN)^2 + BN^2$$
$$\Rightarrow OB^2 = OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$$
$$\Rightarrow OB^2 = OA^2 + (AN^2 + BN^2) + 2OA.AN$$
$$\Rightarrow OB^2 = OA^2 + AB^2 + 2OA.AB.\frac{AN}{AB}$$
$$\Rightarrow OB^2 = OA^2 + OC^2 + 2OA.OC\ Cos\alpha$$
$$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\ Cos\alpha$$
$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQCos\alpha}\ \ \dots\ \dots\ \dots\ (1)$$

লব্ধির দিক নির্ণয়: মনেকরি লব্ধি R, P এর সাথে θ কোন উৎপন্ন করে। অর্থাৎ $\angle AOB = \theta$ $\therefore$ OBN সমকোণী ত্রিভুজে

$$\tan\theta = \frac{BN}{ON}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{BN}{OA + AN}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{AB\frac{BN}{AB}}{OA + AB\frac{AN}{AB}}$$
$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{QSin\alpha}{P + QCos\alpha}$$
$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{QSin\alpha}{P + QCos\alpha}\ \dots\ \dots\ \dots\ (2)$$

(1) নং সমীকরণ লব্ধির মান ও (2) নং সমীকরণ লব্ধির দিক নির্দেশ করে।

একই সময়ে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি দিকরাশির লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান রাশি দু'টির যোগফল ও বিয়োগ ফলের সমান ঃ

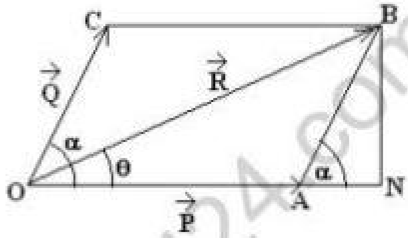
P ও Q, α কোণে ক্রিয়া করলে সামান্তরিকের সূত্রানুযায়ী আমরা পাই,

$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\text{Cos}\alpha}$ ... ... (1)

$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\ \text{Cos}\alpha$

$\Rightarrow R^2 - P^2 - Q^2 = 2PQ\ \text{Cos}\alpha$

$\Rightarrow \text{Cos}\alpha = \dfrac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$ আবার আমরা জানি, $\text{Cos}\alpha$ এর মান



-1 থেকে $+1$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। অর্থাৎ, $1 \geq \text{Cos}\alpha \geq -1$

$\Rightarrow 1 \geq \dfrac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ} \geq -1$ [$\text{Cos}\alpha$ এর মান বসিয়ে]

$\Rightarrow 2PQ \geq R^2 - P^2 - Q^2 \geq -2PQ$

$\Rightarrow P^2 + Q^2 + 2PQ \geq R^2 \geq P^2 + Q^2 - 2PQ$ [উভয় পক্ষে P^2+Q^2 যোগ করে]

$\Rightarrow (P+Q)^2 \geq R^2 \geq (P \sim Q)^2$

$\therefore (P+Q) \geq R \geq (P \sim Q)$ কাজেই একই সময়ে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দু'টি দিক রাশির লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান রাশি দুটির যোগফল ও বিয়োগ ফলের সমান। অন্য ভাবেও বলা যায়, একই সময়ে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দু'টি দিক রাশির লব্ধির সর্বোচ্চ মান রাশি দুটির যোগফল হতে বড় হতে পারে না ও সর্বনিম্ন মান রাশি দুটির বিয়োগ ফল থেকে ছোট হতে পারে না।

দু'টি ভেক্টর রাশি P ও Q পরস্পর কোণে θ আণত। এদের স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন ঃ

স্কেলার গুণন বা ডট গুণন ঃ দু'টি দিক রাশির স্কেলার গুণন একটি অদিক রাশি এবং এর মান দিকরাশি দুটির মানের গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণের Cosine –এর গুণ ফলের সমান হবে।

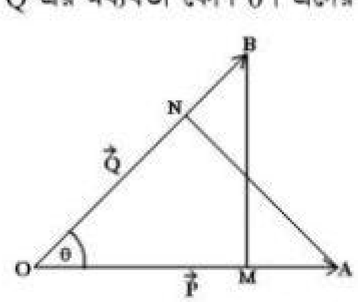
ব্যাখ্যাঃ মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দু'টি দিক রাশি পরস্পর θ কোণে আনত্ অর্থাৎ P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ θ। এদের ডট গুণন অর্থাৎ স্কেলার গুণন $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\text{Cos}\theta$

চিত্রানুযায়ী, $\vec{P} = \vec{OA}$; $\vec{Q} = \vec{OB}$; BM, OA এর উপর লম্ব ও AN, OB এর উপর লম্ব । সুতরাং $OM = OB\ \text{Cos}\ \theta$

বা, $OM = Q\ \text{Cos}\ \theta$

$\therefore \vec{P}.\vec{Q} = P(Q\text{Cos}\theta) =$ ($\vec{P}$ এর মান) (OM)

$=$ ($\vec{P}$ এর মান) ($\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপের মান)



অনুরূপভাবে, $\therefore \vec{Q}.\vec{P} = QPCos\theta = Q(PCos\theta) =$ ($\vec{Q}$ এর মান) ($\vec{Q}$ এর উপর $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপের মান) অর্থাৎ **দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার অর্থাৎ ডট গুণফল বলতে এদের যে কোন একটি ভেক্টর রাশি দ্বারা উহারদিকে অপর ভেক্টর রাশিটির অভিক্ষেপের গুণফল বোঝায়।**

(ক) যদি ভেক্টর রাশিদ্বয় পরস্পর সমকোনে আনত্ থাকে তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\ \text{Cos}\ 90^\circ = 0$ অতএব দু'টি ভেক্টররাশি সমকোণে আনত্ থাকলে এদের স্কেলার গুনফল শূন্য হবে বিপরীতক্রমে দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুনফল শূন্য হলে রাশি দুটি পরস্পরের উপর লম্ব হবে।

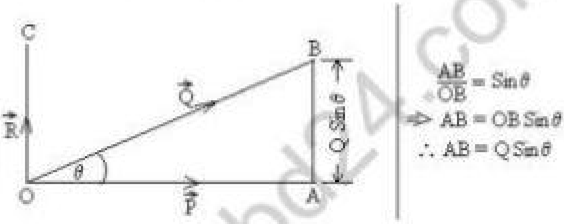
ধরি তিনটি আয়তকার ভেক্টর রাশি $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ প্রত্যেকে পরস্পরের উপর লম্ব।
সুতরাং এদের যে কোন দু'টির স্কেলার গুনফল শূন্য হবে। অর্থাৎ $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

(খ) যদি দুটি ভেক্টর রাশি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 0^o$;
সে ক্ষেত্রে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\ Cos\ 0^\circ = PQ$ হবে। একক দিক রাশির ক্ষেত্রে পাই, $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

(গ) যদি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি পরস্পর বিপরীতমুখী হয় তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 180^o$ হয় তবে সে ক্ষেত্রে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\ Cos\ 180^\circ = -PQ$ হবে।

<u>ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন ঃ</u> দু'টি দিক রাশির ভেক্টর (ক্রস) গুণন একটি ভেক্টর রাশি যার মান দিকরাশি দুটির মানের গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণের Sine -এর গুণ ফলের সমান এবং এই গুনফল রাশি দু'টির তলে লম্বভাবে স্থাপিত একটি ডান পাকের কর্ক স্ক্রুকে ১ম ভেক্টর রাশি থেকে ২য় ভেক্টর রাশির দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে এটা যে দিকে অগ্রসর হয় সেই দিকে ক্রিয়া করে।

<u>ব্যাখ্যাঃ</u> মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দু'টি দিক রাশি পরস্পর θ কোণে আনত্ অর্থাৎ P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ θ। এদের ক্রস গুণন অর্থাৎ ভেক্টর গুণন $\vec{P}\times\vec{Q}=\vec{\eta}PQSin\theta$ এখানে $\vec{\eta}$ একটি একক দিক রাশি যা $(\vec{P}\times\vec{Q})$ এর লব্ধির দিক নির্দেশ করে। যদি $\vec{P}\times\vec{Q}=\vec{R}$ ধরা হয় তবে R এর অভিমুখ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর সমতলের সাথে অভিলম্ব বরাবর হবে।



$\therefore \vec{R}=\vec{P}\times\vec{Q}=\vec{\eta}PQSin\theta$

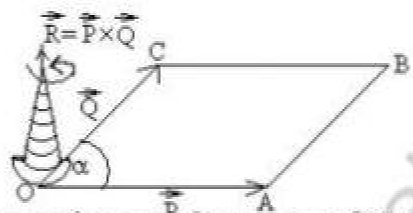
$=\vec{\eta}$ (P এর মান) (P এর লম্ব বরাবর Q এর মান)

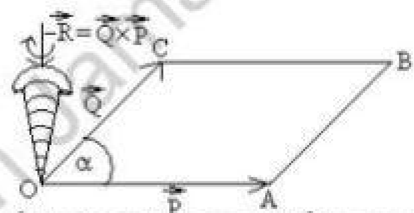
আবার, $\vec{Q}\times\vec{P}=\vec{\eta}QPSin(-\theta)$

$\Rightarrow \vec{Q}\times\vec{P}=-\vec{\eta}QPSin\theta$

$\Rightarrow \vec{Q}\times\vec{P}=-\vec{\eta}$ (Q এর মান) (Q এর লম্ব বরাবর P এর মান)

$\therefore \vec{P}\times\vec{Q}\neq\vec{Q}\times\vec{P}$ অর্থাৎ ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।





আমরা জানি, ডান পাকের কর্ক স্ক্রুকে বামদিকে ঘুরালে এটি উপরের দিকে খুলে আসে আর ডান দিকে ঘুরালে নিচের দিকে অগ্রসর হয়, তদ্রুপ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর ভেক্টর গুণন বামাবর্তী হলে এদের লব্ধি $\vec{R}$ এর অভিমুখ উর্ধ্ব দিকে হয় এবং $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর ভেক্টর গুণন দক্ষিনাবর্তী হলে এদের লব্ধি $\vec{R}$ এর অভিমুখ নিম্নমুখী হবে যা পূর্বের অভিমুখের উল্টা দিকে হবে।

উপরোক্ত বর্ণনা অনুসারে,

1) $\theta=0$ হলে $\vec{P}\times\vec{Q}=0$ হবে কারণ $Sin\,0^o=0$

2) $\vec{P}\parallel\vec{Q}$ হলে $\vec{P}\times\vec{Q}=0$ হবে কারণ $Sin\,0^o=0$

3) $\vec{P}\perp\vec{Q}$ হলে $\vec{P}\times\vec{Q}=PQ$ হবে কারণ $Sin\,90^o=1$

4) $\hat{i},\hat{j}$ ও $\hat{k}$ সমকাণে ক্রিয়া করলে $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

ও $\hat{i},\hat{j}$ ও $\hat{k}$ সমান্তরালে ক্রিয়া করলে $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$

<u>স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে কিন্তু ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না:</u>

মনে করি দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$, α কোণে আনত্ $\therefore\ \vec{P}.\vec{Q}=PQCos\alpha$ ... ... (1)

আবার, $\vec{Q}.\vec{P}=QPCos\alpha$

$\Rightarrow \vec{Q}.\vec{P}=PQCos\alpha$ ... ... (2)

(1) ও (2) হতে পাই, $\vec{P}.\vec{Q}=\vec{Q}.\vec{P}$ অর্থাৎ স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে। অপরপক্ষে, $(\vec{P}\times\vec{Q})$ ও $(\vec{Q}\times\vec{P})$ এর মান একই হলেও এদের দিক বিপরীত অর্থাৎ $\vec{P}\times\vec{Q}=\vec{\eta}\,PQ\,Sin\alpha$ ... ... (3)

আবার, $\vec{Q}\times\vec{P}=\vec{\eta}QP\,Sin(-\alpha)$

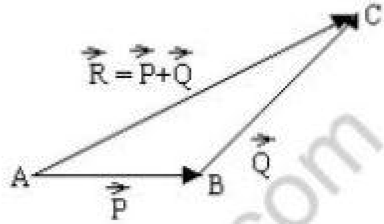
$\Rightarrow \vec{Q}\times\vec{P}=-\vec{\eta}\,PQ\,Sin\alpha$ ... ... (4)

(3) ও (4) হতে পাই, $(\vec{P}\times\vec{Q}) = -(\vec{Q}\times\vec{P})$

$\therefore \vec{P}\times\vec{Q} \neq \vec{Q}\times P$ অর্থাৎ ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র *(Triangle Law)* ঃ

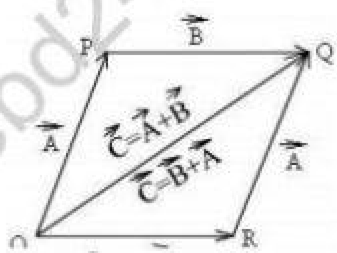
দুটি ভেক্টরকে একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে দিকে ও মানে নির্দেশ করলে ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহু বিপরীত ক্রমে দিকে ও মানে উহাদের লব্ধি নির্দেশ করে।



ব্যাখ্যা ঃ ধরি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ একই জাতীয় দুটি ভেক্টর। ABC ত্রিভুজের AB এবং BC বাহু যথাক্রমে ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ নির্দেশ করে। সূত্রানুসারে, $\vec{AC} = \vec{AB}+\vec{BC}$

$\therefore \vec{R} = \vec{P}+\vec{Q}$ [এখানে, $\vec{AC} = \vec{R}$]

ভেক্টরের যোগের বিনিময় সূত্র *(Commutative Law)* ঃ $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$



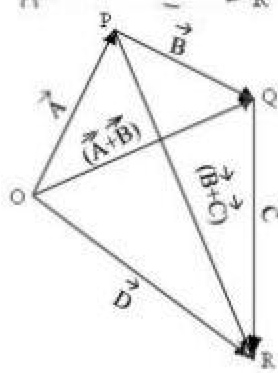
প্রমাণ : ধরা যাক $\vec{OP} = \vec{A}$ এবং $\vec{OR} = \vec{B}$ দুটি ভেক্টর O বিন্দুতে ক্রিয়া করে OPQR সামান্তরিক পূর্ণ করে ত্রিভুজ সূত্রানুসারে পাই,

$$\vec{OP}+\vec{PQ} = \vec{OQ} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$\text{এবং } \vec{OR}+\vec{RQ} = \vec{OQ} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

(1) ও (2) থেকে পাই, $\vec{OP}+\vec{PQ} = \vec{OR}+\vec{RQ}$

অর্থাৎ, $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ সুতারাং ভেক্টর যোগ বিনিময় সূত্র মেনে চলে।



ভেক্টরের যোগের সংযোগ সূত্র *(Associative Law)* : $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

প্রমাণ : ধরা যাক $\vec{OP} = \vec{A}$, $\vec{PQ} = \vec{B}$ এবং $\vec{QR} = \vec{C}$ । এখন OQ, PR এবং OR ধরে

ত্রিভুজ সূত্রানুসারে পাই, $\vec{OP}+\vec{PQ} = \vec{OQ} = (\vec{A}+\vec{B})$

এবং $\vec{PQ}+\vec{QR} = \vec{PR} = (\vec{B}+\vec{C})$

এখন $\vec{OQ}+\vec{QR} = \vec{OR}$ অর্থাৎ $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{D}$

আবার, $\vec{OP}+\vec{PR} = \vec{OR}$ অর্থাৎ $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{D}$

$\therefore (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ সুতারাং ভেক্টর যোগ সংযোগ সূত্র মেনে চলে।

বন্টন সূত্রঃ $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ **এর প্রমাণঃ**

প্রমাণঃ মনে করি, $\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি যথাক্রমে OP,OQও QR দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। এখন চিত্র থেকে আমরা

পাই, $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.(\vec{OQ}+\vec{QR})$

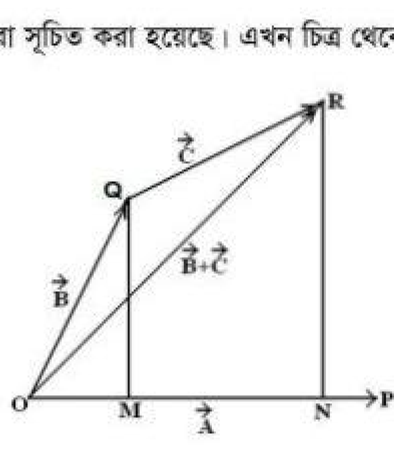
$\Rightarrow \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{OR}$

$\Rightarrow \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = A\times \vec{OP}$ এর উপর $\vec{OR}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ

$\Rightarrow \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = A\times ON$

$\Rightarrow \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = A\times (OM+MN)$

$\Rightarrow \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = A\times OM + A\times MN$



$\Rightarrow \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = A \times \vec{OP}$ এর উপর $\vec{OQ}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $+ A \times \vec{OP}$ এর উপর $\vec{QR}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ

$\Rightarrow \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{OQ}+\vec{A}.\vec{QR}$

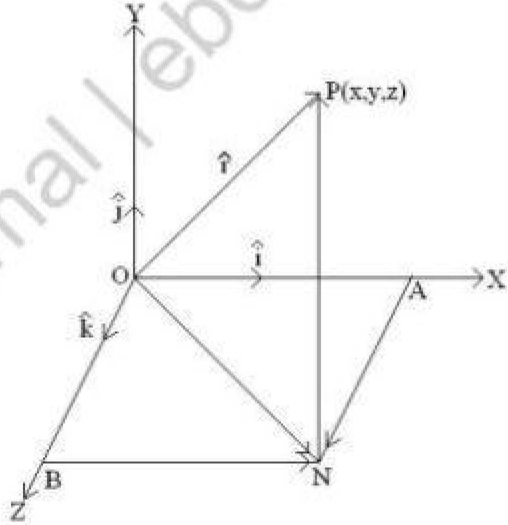
$\therefore \vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ (প্রমাণিত)

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি অবস্থান ভেক্টরের মান নির্ণয়:

অর্থাৎ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ এর প্রমাণ :

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় পরস্পর তিনটি রেখা OX, OY ও OZ যথাক্রমে X, Y ও Z, অক্ষ নির্দেশ করে এবং $\vec{i}$, $\vec{j}$ ও $\vec{k}$ অক্ষ তিনটি বরাবর একক ভেক্টর। $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর। ধরি, $\vec{r}=\vec{OP}$ এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y,z)। XZ তলের উপর PN এবং N বিন্দু হতে X ও Z অক্ষের উপর যথাক্রমে NA ও NB লম্ব আঁকি।

চিত্র হতে, BN =OA= x, AN=OB = z এবং NP = y



ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে, $\vec{OP}=\vec{ON}+\vec{NP}$

$\Rightarrow \vec{OP}=\vec{OB}+\vec{BN}+\vec{NP}$

$\Rightarrow \vec{OP}=\vec{BN}+\vec{NP}+\vec{OB}$

$\therefore \vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

আবার, OPN ত্রিভুজ হতে, $OP^2=ON^2+NP^2$

$\Rightarrow OP^2=OB^2+BN^2+NP^2$

$\Rightarrow OP^2=BN^2+NP^2+OB^2$

$\Rightarrow r^2=x^2+y^2+z^2$

$\therefore r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (প্রমাণিত)

$\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$ এর প্রমাণ:

ধরি, $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ ও $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$

ফলে, $\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}).(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x(\hat{i}.\hat{i})+A_xB_y(\hat{i}.\hat{j})+A_xB_z(\hat{i}.\hat{k})$$
$$+A_yB_x(\hat{j}.\hat{i})+A_yB_y(\hat{j}.\hat{j})+A_yB_z(\hat{j}.\hat{k})$$
$$+A_zB_x(\hat{k}.\hat{i})+A_zB_y(\hat{k}.\hat{j})+A_zB_z(\hat{k}.\hat{k})$$

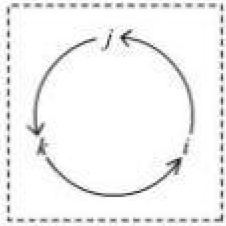
$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x(1)+A_xB_y(0)+A_xB_z(0)+A_yB_x(0)+A_yB_y(1)+A_yB_z(0)+A_zB_x(0)+A_zB_y(0)+A_zB_z(1)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x+0+0+0+A_yB_y+0+0+0+A_zB_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \quad \text{(Proved)}$$

$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ ও $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ হলে

$\vec{A}\times\vec{B}$ নির্ণয় :



$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=A_xB_x(\hat{i}\times\hat{i})+A_xB_y(\hat{i}\times\hat{j})+A_xB_z(\hat{i}\times\hat{k})$$
$$+A_yB_x(\hat{j}\times\hat{i})+A_yB_y(\hat{j}\times\hat{j})+A_yB_z(\hat{j}\times\hat{k})$$
$$+A_zB_x(\hat{k}\times\hat{i})+A_zB_y(\hat{k}\times\hat{j})+A_zB_z(\hat{k}\times\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=0+A_xB_y(\hat{k})+A_xB_z(-\hat{j})+A_yB_x(-\hat{k})+0+A_yB_z(\hat{i})+A_zB_x(\hat{j})+A_zB_y(-\hat{i})+0$$

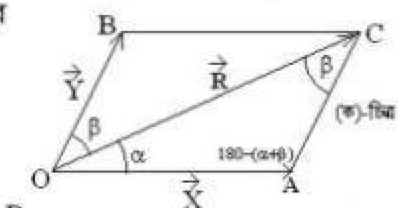
$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=A_yB_z(\hat{i})+A_zB_y(-\hat{i})+A_zB_x(\hat{j})+A_xB_z(-\hat{j})+A_xB_y(\hat{k})+A_yB_x(-\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \quad \text{(Ans.)}$$

ভেক্টর বিভাজন বা ভেক্টর বিশ্লেষন *(Resolution Of Vectors)* ঃ

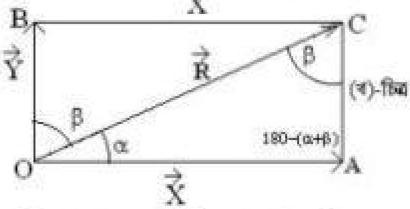
একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার পদ্ধতিকে ভেক্টরের বিভাজন বা ভেক্টরের বিশ্লেষন বলে। মনেকরি, চিত্রে OC রেখা $\vec{R}$ ভেক্টরটির মান ও দিক নির্দেশ করে। এখন $\vec{R}$ ভেক্টরটিকে এমন দু'টি অংশে বিভক্ত করতে হবে যে, এ গুলো OC এর সাথে যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করে। এখন O বিন্দু থেকে OC রেখার সাথে এর দুই পাশে α ও β কোণ করে OB ও OA রেখা টানা হল। OACB সামান্তরিকটি পূর্ণ করা হলে সামান্তরিকের সূত্রানুসারে OA এবং OB বাহু দুটি $\vec{R}$ ভেক্টরের দুটি উপাংশ নির্দেশ করবে।



মনেকরি, বিভাজিত উপাংশ $\vec{OA}=\vec{X}$ এবং $\vec{OB}=\vec{Y}$ ।

(ক) চিত্রে, $\angle BOC=\angle OCA=\beta$

এবং $\angle OAC=180^o-(\alpha+\beta)$ এখন OAC ত্রিভুজ বিবেচনা করে আমরা পাই,



$$\frac{OA}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin\alpha}=\frac{OC}{\sin[180-(\alpha+\beta)]}$$

$$\Rightarrow \frac{X}{\sin\beta}=\frac{Y}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (\because AC=OB=Y)$$

$$\therefore X=\frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ এবং } Y=\frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

R ভেক্টরকে যদি সমকোণে বিভাজিত করা যায় [চিত্র (খ)] অর্থাৎ উপাংশ দুটি যদি পরস্পর লম্ব হয় তবে তাহলে, $\alpha+\beta=90^o$ $\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin 90^o=1$

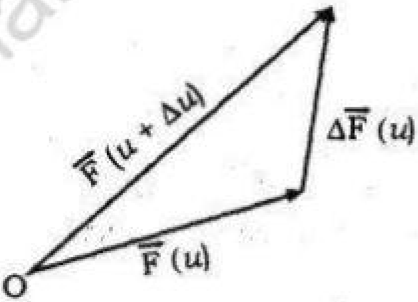
$\therefore X=R\sin\beta$ এবং $Y=R\sin\alpha$ যেহেতু $\alpha+\beta=90^o$ $\therefore \beta=90^o-\alpha$

$\therefore \sin\beta=\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$ ফলে, $X=R\cos\alpha$ এবং $Y=R\sin\alpha$

ভেক্টর ক্যালকুলাস
Vector Calculus

এই অনুচ্ছেদে আমরা সহজতর উপায়ে ভেক্টর ক্যালকুলাস নিয়ে আলোচনা করব । ভেক্টর ক্যালকুলাসের দুটি অংশ, একটি ভেক্টর অন্তরিকরণ (Vector differentiation) এবং অপরটি ভেক্টর যোগজীকরণ বা সমাকলন (Vector integration) । পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখা যেমন– ক্লাসিকেল মেকানিক্স, ইলেকট্রডাইনামিক্সের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করার জন্য ভেক্টর ক্যালকুলাস ব্যবহার অনেক ক্ষেত্রে অপরিহার্য । প্রথমে আমরা ভেক্টর অন্তরিকরণের সাথে পরিচিত হই ।

২.৯.১ ভেক্টর সাধারণ অন্তরিকরণ
Ordinary Differentiation of Vectors



একটি স্কেলার চলক u-এর উপর নির্ভরশীল একটি ভেক্টর $\vec{F}(u)$ বিবেচনা করি । সুতরাং $\vec{F} = \vec{F}(u)$ । তখন

$$\frac{\Delta\vec{F}(u)}{\Delta u} = \frac{\vec{F}(u+\Delta u) - \vec{F}(u)}{\Delta u}$$

যেখানে Δu, u এর বৃদ্ধি নির্দেশ করে এবং $\Delta\vec{F}$ গুলো Δu পরিবর্তনের জন্য $\vec{F}$ এর পরিবর্তন । কাজেই $\vec{F}(u)$ এর সাধারণ অন্তরিকরণ

$$\frac{d\vec{F}(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\vec{F}(u)}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{F}(u+\Delta u) - \vec{F}(u)}{\Delta u}$$

যেহেতু $\frac{d\vec{F}}{du}$ একটি ভেক্টর রাশি সেহেতু এর অন্তরিকরণ সম্ভব এবং এটা হবে $\frac{d^2\vec{F}}{du^2}$ । একইভাবে উচ্চক্রমের অন্তরিকরণ থাকাও সম্ভব ।

উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, যদি $\vec{F}(u)$ একটি সরণ ভেক্টর $\vec{r}$ হয় এবং চলক u সময় t নির্দেশ করে তবে বেগ

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ ও ত্বরণ } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{d^2t^2}$$

যদি $\vec{C}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর হয তবে তার অন্তরিকরণের মান শূন্য হবে।

ভেক্টর অন্তরিকরণের কিছু নিয়ম
Some Rules of Vector Differentiation

(১) দুটি অন্তরিকরণযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষকের যোগফলের অন্তরিকরণ এদের পৃথক পৃথক অন্তরিকরণের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ

$$\frac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du}$$

প্রমাণ : ধরি, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

$$\therefore \quad \vec{C} + \delta\vec{C} = (\vec{A} + \delta\vec{A}) + (\vec{B} + \delta\vec{B})$$

[$\delta\vec{A}$, $\delta\vec{B}$ ও $\delta\vec{C}$, যথাক্রমে $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ পরিবর্তন বুঝায়]

$$= \vec{A} + \vec{B} + \delta\vec{A} + \delta\vec{B}$$

$$\delta\vec{C} = \delta\vec{A} + \delta\vec{B}$$

উভয় পক্ষকে δu দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{\delta\vec{C}}{\delta u} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta u} + \frac{\delta\vec{B}}{\delta u}$$

এখন $\delta u \to 0$ সীমায় লিখা যায়

$$\frac{d\vec{C}}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du}$$

বিশেষভাবে, যদি কোন ভেক্টর রাশিকে আয়তাকার উপাংশ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেমন,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

তখন সময় t এর সাপেক্ষে অন্তরিকরণ হবে

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

যদি $\vec{r} = \vec{r}\,[s(t)]$ হয় তবে $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}$

(২) দুই ভেক্টরের স্কেলার গুণের অন্তরিকরণ (Differentiation of scalar product of two vectors) :

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণ C, অর্থাৎ

$$C = \vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\therefore \frac{dC}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}$$

(৩) দুই ভেক্টরের ভেক্টর গুণের অন্তরিকরণ (Differentiation of vector product of two vectors) :

ধরা যাক, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর অপেক্ষক। কাজেই $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$

$$\frac{d\vec{C}}{du} = \frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}$$

এক্ষেত্রে ভেক্টরের অবস্থানের (আগে বা পিছে) ক্রম অবশ্যই মেনে চলতে হবে।

(৪) স্কেলার অপেক্ষক ও ভেক্টর অপেক্ষক এর গুণফলের অন্তরিকরণ (Differentiation of the product of a scalar and vector function) :

ধরা যাক, $\phi(u)$ ও $\vec{A}(u)$ যথাক্রমে একটি স্কেলার ও একটি ভেক্টর অপেক্ষক। সুতরাং

$$\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \phi\frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\phi}{du}\vec{A}$$

(৫) স্কেলার ট্রিপল গুণের অন্তরিকরণ (Differentiation of scalar triple product) :

ধরি $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ তিনটি ভেক্টর। সুতরাং

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C} + \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$$

(৬) ভেক্টর ট্রিপল গুণের অন্তরিকরণ (Differentiation of vector triple product) :

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du}\right) + \vec{A}\times\left(\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C}\right) + \frac{d\vec{A}}{du}\times(\vec{B}\times\vec{C})$$

ভেক্টর অন্তরিকরণের উদাহরণ : একটি ভেক্টর $\vec{r} = 3t^2\,\hat{i} - t\,\hat{j} + (2t+1)\,\hat{k}$ দেয়া আছে। এদের প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরিকরণ এবং $t = 0$ তে এদের মান নির্ণয় করতে হবে।

১ম ক্রমের অন্তরিকরণ

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\,\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k},$$

২য় ক্রমের অন্তরিকরণ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 6\hat{i}\text{ ।}$$

অতএব, $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = \left|\sqrt{(6t)^2 + (-1)^2 + 2^2}\right|_{t=0} = \sqrt{5}$

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = \left|6\hat{i}\right| = 6$$

ভেক্টর সমাকলন
Vector Integration

ধরা যাক, $\vec{R}(u) = R_x(u)\hat{i} + R_y(u)\hat{j} + R_z(u)\hat{k}$ একটি ভেক্টর রাশি যা একটি স্কেলার চলক u এর অপেক্ষক। ধরি, $\vec{R}(u)$ একটি সীমা বা অঞ্চলের ভিতরে নিরবচ্ছিন্ন। অতএব

$$\int \vec{R}(u)du = \hat{i}\int \vec{R}(u)du + \hat{j}\int \vec{R}(u)du + \hat{k}\int \vec{R}(u)du$$

এটা সীমা অনির্দেশক সমাকলন। এখন যদি $\vec{R}(u) = \frac{d}{du}(\vec{S}(u))$ একটি অপেক্ষক থাকে, তবে

$$\int \vec{R}(u)du = \int \frac{d}{du}\vec{S}(u)du = \int d\vec{S}(u) = \vec{S}(u) + \vec{C}$$

যেখানে $\vec{C}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর নির্দেশ করে যা u চলকের উপর নির্ভরশীল নয়।
যদি সমাকলনটি সীমা নির্দেশক সমাকলন হয় তবে

$$\int_a^b \vec{R}(u)du = \left[\vec{S}(u) + \vec{C}\right]_a^b = \vec{S}(b) - \vec{S}(\bar{a})$$

ভেক্টরের রেখা সমাকলন
Line Integral of a Vector

ধরি $\vec{A}$ একটি ভেক্টর অপেক্ষক যার চলক $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$। সুতরাং রেখা সমাকলন

$$\int \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k})$$

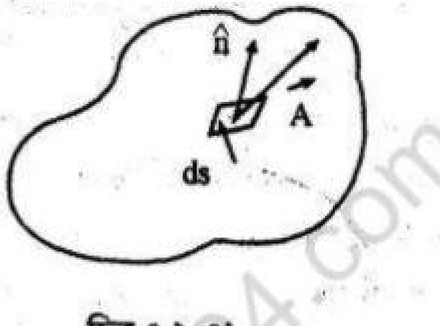
$$= \int (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

$$= \int A_x dx + \int A_y d_y + \int A_z dz$$

যদি সমাকলন রেখা বদ্ধ রেখা হয় তবে $\oint A.dr$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ভেক্টর রাশির পৃষ্ঠতল সমাকলন (Surface integral of vectors) ঃ

ধরা যাক, S একটি দুই তলের পৃষ্ঠতল। ধরি একটি তল (সাধারণত উপরের তল) ধনাত্মক এবং এই তলের উপর যেকোন বিন্দুতে একক লম্বভেক্টর $\hat{n}$। এখন ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পৃষ্ঠতল ds এর পৃষ্ঠের সাথে একটি ভেক্টর $d\vec{s}$ জড়িত রয়েছে। $d\vec{s}$ এর মান ds এবং দিক $\hat{n}$ বরাবর।



চিত্র ঃ ২.৩১

তখন লিখা যায়

$$d\vec{s} = \hat{n}ds$$

এবং পৃষ্ঠতল সমাকলন

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}ds$$

যদি পৃষ্ঠতলটি বদ্ধতল হয়, তবে সমাকলনকে নিম্ন উপায়ে প্রকাশ করা হয়।

$$\oiint \vec{A}\cdot\hat{n}ds$$

আয়তন সমাকলন (Volume integral) ঃ

একটি ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}$ এর আয়তন সমাকলন

$$\iiint_V \vec{A}dv$$

দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ভেক্টর অপারেটর, গ্রাডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল

Vector operator, Gradient, Divergence and Curl

ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটরের সংজ্ঞা হলো (কার্তেসীয় স্থানাংক সিস্টেমে)।

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

এই অপারেটরের ধর্মাবলী অনেকটা সাধারণ ভেক্টরের মত। $\vec{\nabla}$ কে ডেল (DEL) বা নাবলা (Nabla) বলা হয়। বাস্তব প্রয়োগের ক্ষেত্রে $\vec{\nabla}$ এর সাথে জড়িত তিনটি গুরুত্বপূর্ণ রাশি রয়েছে। এরা হলো, গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স ও কার্ল। রাশি তিনটি আলোচনার পূর্বে স্কেলার বা ভেক্টর ক্ষেত্রের সাথে পরিচিত হওয়া দরকার।

স্কেলার বা ভেক্টর ক্ষেত্র (Scalar or Vector field) ঃ

স্কেলার ক্ষেত্র বলতে এমন একটি অঞ্চল বুঝায়, যার ভিতর একটি স্কেলার বিন্দু অপেক্ষক (Point function) তাপমাত্রা, তড়িৎ বিভব, ঘনত্ব ইত্যাদির মত স্কেলার ভৌত রাশিকে নির্দেশ করে। স্কেলার ক্ষেত্রকে একটি নিরবচ্ছিন্ন অপেক্ষক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং এটা প্রত্যেক বিন্দুতে ভৌত রাশির একটি মান প্রদান করে।

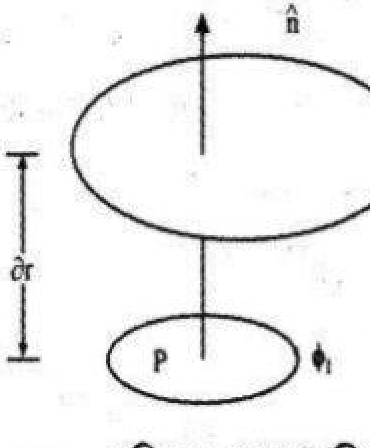
অন্যদিকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলতে এমন একটি অঞ্চল বুঝায়, যার ভিতর একটি ভেক্টর বিন্দু অপেক্ষক বেগ, ত্বরণ, তড়িৎ ক্ষেত্রের তীব্রতা ইত্যাদির মত ভেক্টর ভৌত রাশিকে নির্দেশ করে। ভেক্টর ক্ষেত্রকে একটি নিরবচ্ছিন্ন ভেক্টর বিন্দু অপেক্ষক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং এটা প্রত্যেক বিন্দুতে ভৌত রাশির একটি মান ও দিক প্রদান করে।

স্কেলার ক্ষেত্রের গ্র্যাডিয়েন্ট (Gradient of Scalar field) ঃ

ধরি $\phi(x,y,z)$ কোন স্থানে একটি নির্দিষ্ট অঞ্চলের প্রত্যেক বিন্দুতে (x,y,z) ব্যবকলনযোগ্য। কাজেই এটা একটি স্কেলার ক্ষেত্র। তখন ϕ এর গ্র্যাডিয়েন্ট এর সংজ্ঞা হলো

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

উল্লেখ্য যে, $\vec{\nabla}\phi$ একটি ভেক্টর ফিল্ড নির্দেশ করে। গ্রেডিয়েন্ট ϕ কে অনেক সময় grad ϕ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আরো উল্লেখ্য যে, কোন বিন্দুতে $\vec{\nabla}\phi$ এর দিক হলো ঐ বিন্দুতে $\phi(x, y, z)$ অপেক্ষক দ্বারা সৃষ্ট পৃষ্ঠতলের সাথে লম্ব এবং এর মান হলো পৃষ্ঠতলের সাথে লম্বদিকে দূরত্বের সাপেক্ষে $\phi(x, y, z)$ এর পরিবর্তনের হার। চিত্র অনুযায়ী $\vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dr}$



চিত্র-২.৩২ ঃ গ্র্যাডিয়েন্ট

$\hat{n}$; $\hat{n}$ হলো P বিন্দুতে লম্ব একক ভেক্টর।

গ্র্যাডিয়েন্টের কিছু বৈশিষ্ট্য (Some characteristics of gradients) ঃ

$$\vec{\nabla}(u\,v) = u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u$$

যেখানে u এবং v দুটি স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

দুটি স্কেলার ক্ষেত্রের যোগফলের গ্রেডিয়েন্ট আলাদা ভাবে প্রত্যেক ক্ষেত্রের গ্রেডিয়েন্টের যোগফলের সমান।

অর্থাৎ, $\vec{\nabla}(u+v) = \vec{\nabla}u + \vec{\nabla}v$

উদাহরণ : ধরি $\phi(x, y, z) = 2xz^4 - x^2y$ একটি স্কেলার অপেক্ষক। কাজেই এর গ্রেডিয়েন্ট -

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(2xz^4 - x^2y)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(2xz^4 - x^2y) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(2xz^4 - x^2y) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(2xz^4 - x^2y)$$

$$= \hat{i}(2z^4 - 2xy) - \hat{j}x^2 + \hat{k}\,8xz^3$$

এখন $(2,-2,-1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\phi$ হলো

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}(2(-1)^4 - 2\cdot 2(-2)) - \hat{j}2^2 + \hat{k}\,8\cdot 2\cdot(-1)^3$$

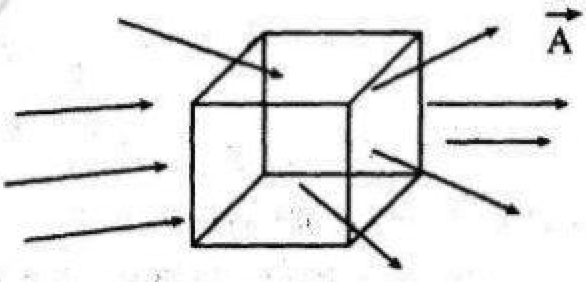
$$= \hat{i}10 - \hat{j}4 - \hat{k}\,16$$

সুতরাং $\vec{\nabla}\phi$ এর মান

$$|\nabla\phi| = \sqrt{10^2 + (-4)^2 + (-16)^2} = \sqrt{372} = 2\sqrt{93}$$

ডাইভারজেন্স (Divergence) :

কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলতে একক আয়তনে (diverging) অপসারী বা অভিসারী (converging) ভেক্টর ক্ষেত্রের নিট ফ্লাক্সের পরিমাণ বুঝায়। এখানে অন্তগামী ফ্লাক্স ধনাত্মক ও বহির্গামী ফ্লাক্স ঋণাত্মক বিবেচনা করা হয়।



চিত্র-২.৩৩ : $\vec{A}$ ভেক্টরের ডাইভারজেন্স।

ধরি, $F(x,y,z) = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ একটি নির্দিষ্ট অঞ্চলের ভেতর প্রত্যেক বিন্দু (x, y, z) তে ব্যবকলনযোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক। এখন $\vec{F}$ এর ডাইভারজেন্স হলো

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z)$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad [\because \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \text{ এবং } \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0]$$

সুতরাং একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স স্কেলার রাশি। $\vec{\nabla}.\vec{F}$ কে অনেক সময় div$\vec{F}$ দ্বারা প্রকাশ করা

এখানে বিশেষ ভাবে উল্লেখ্য যে, যদিও $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ কিন্তু $\vec{\nabla}.\vec{F} \neq \vec{F}.\vec{\nabla}$।

যদি একটি ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{A} = x^2z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$ বিবেচনা করা হয় তবে,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^2z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(2y^3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)$$
$$= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2$$

এবং কোন বিন্দু (1,–1,1) তে $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ এর মান হলো

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 2\cdot1\cdot1 - 6(-1)^2 1^2 + 1(-1)^2 = 2 - 6 + 1 = -3$$

ডাইভারজেন্সের বৈশিষ্ট্য (Characteristics of divergence)

ধরা যাক, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ব্যবকলনযোগ্য দুটি ভেক্টর অপেক্ষক এবং ϕ ও ψ দুটি স্কেলার অপেক্ষক।

(i) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ $\quad (\text{div}(\vec{A}+\vec{B}) = \text{div}\vec{A} + \text{div}\vec{B})$

(ii) $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A} + \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$

(iii) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

(iv) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$

$\vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ কে লাপ্লাসিয়ান অপারেটর বলে।

ভেক্টরের কার্ল (Curl of a vector) ঃ

একটি ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারদিকে একটি রেখা সমাকলনের মান একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তাকে উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল বলা হয়। ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি এবং এর দিক বিন্দুটির চারদিকে ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফলের সাথে লম্ব। ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্লকে গাণিতিকভাবে নিম্নে প্রকাশ করা হলো।

ধরি, $\vec{V}(x, y, z)$একটি ব্যবকলনযোগ্য ভেক্টর ক্ষেত্র। এই ক্ষেত্রের কার্ল বা ঘূর্ণন হলো।

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k})$$
$$= \frac{\partial V_x}{\partial x}\hat{i}\times\hat{i} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\hat{i}\times\hat{j} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\hat{i}\times\hat{k} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\hat{j}\times\hat{i} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\hat{k}\times\hat{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\hat{k}\times\hat{k}$$
$$= 0 + \frac{\partial V_y}{\partial x}\hat{k} + \frac{\partial V_z}{\partial x}(-\hat{j}) + \frac{\partial V_x}{\partial y}(-\hat{k}) + 0 + \frac{\partial V_z}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\hat{j} + \frac{\partial V_y}{\partial z}(-\hat{i}) + 0$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

নির্ণায়কের সাহায্যেও $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ কে প্রকাশ করা যায়।

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$\vec{\nabla} \times \vec{V}$ কে অনেক সময় Curl $\vec{V}$ বা rot $\vec{V}$ প্রতিকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়ে থাকে।

ধরি, $\vec{A} = xz^3\,\hat{i} - 2x^2yz\,\hat{j} - 2yz\,\hat{k}$ একটি ভেক্টর অপেক্ষক। অতএব

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{curl}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4) - \frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right\}\hat{i} + \left\{\frac{\partial}{\partial z}(xz^3) - \frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right\}\hat{j} +$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right\}\hat{k}$$

$$= (2z^4 + 2x^2y)\,\hat{i} + \{3xz^2 - 0\}\,\hat{j} + \{-4xyz - 0\}\,\hat{k}$$

$$= (2z^4 + 2x^2y)\,\hat{i} + 3xz^2\,\hat{j} - 4xyz\,\hat{k}$$

এখন (1, –1, 1) বিন্দুতে curl $\vec{A}$ হলো $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$

উল্লেখ্য যে, একটি ভেক্টরের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি।

কার্লের কিছু বৈশিষ্ট্য (Some characteristics of curl) :

ধরি, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর অপেক্ষক এবং ϕ একটি স্কেলার অপেক্ষক। সুতরাং

(i) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$ [curl $(\vec{A} + \vec{B})$ = curl $\vec{A}$ + curl $\vec{B}$]

(ii) $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\phi \times \vec{A} + \phi\,\vec{\nabla} \times \vec{A}$

(iii) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}\,(\vec{\nabla}.\vec{A}) - (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})$

(iv) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$

(v) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$